Unidad I

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Clasificación de ecuaciones diferenciales.

CLASIFICACIÓN POR TIPO Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO).** Por ejemplo.

$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$ y $\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 2x + y$

Una ecuación con derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP).** Por ejemplo.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

CLASIFICACIÓN POR SEGÚN EL ORDEN El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la derivada mayor en la ecuación. Por ejemplo.

$$\overset{\text{segundo orden}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\left(\overset{\text{primer orden}}{\frac{dy}{dx}}\right)^3 - 4y = e^x$$

CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si F es lineal en $y, y', \ldots, y^n$. Esto significa que una EDO de orden n es lineal cuando

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Hay dos propiedades para decidir si una ecuación es lineal

- La variable dependiente y y todas sus derivadas de $y', y'', \ldots, y^n$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término en que interviene y es 1.
- Los coeficientes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^n$ dependen solo de la variable dependiente x.

1.2. Teorema de existencia y unicidad.

El teorema de existencia y unicidad es una extensión del problema con valor inicial. Este teorema afirma que existe una solución para los pre-requisitos iniciales provistos de la ecuación diferencial y la solución obtenida, es de hecho, una solución única.

Imagina una función valorada real f(p, q), cuyo valor es constante para un rectángulo definido por la ecuación,

$$R = (p,q); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

Ahora supongamos que el diferencial parcial de la función real dada con respecto a la variable q también tiene un valor continuo de este rectángulo. Entonces puede concluirse que para la función dada tenemos algún intervalo I donde la función dada tiene una solución cuyo valor es único dentro de ese intervalo. Aquí el pre-requisito inicial definido para la función es,

q’ = f(p, q) y, q(p0) = q0

Y la ecuacióndefiniendo el intervalo de la funciónes,

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]$$

Aquí el valor de h debería ser menor o igual que a.

Para demostrar el teorema establecido arriba, pretendemos elegir el método de demostración por contradicción. Esto significa que vamos a suponer que las afirmaciones anteriores son verdaderas. También significa que existe una solución para la función dada; asume que la solución es una función q(p). Estosignificaquetenemos,

q(p) = q0 + f(t, q(t) dt

Esto es porque si q(p) es una ecuación funcional para la ecuación diferencial dada, entonces podemos concluir que esta es una solución a esa ecuación diferencial. Por lo tanto, también podemos escribir,

q’ = f(p, q) y, q(p0) = q0

Las aproximaciones sucesivas, también famosas por el nombre de su inventor, este es, el método de iteración dePicard, esta es una técnica utilizada para determinar esta ecuación de la función para una ecuación diferencial. Los pasosparadeterminarlason los siguientes:

1. Sea q(p0) = q0 el pre-requisito inicial para la ecuación diferencial dada. Supongamos que esta es cierta para cada valor de p.

2. Ahora usa la fórmula intermitente para determinar el valor de qn como,

$$q_{n+1}(p) = q_0 + \int_{p_0}^{p} f(t, q_n(t))\,dt$$

3. Utilizando el método de inducción, una secuencia completa de las funciones puede generarse. Usando estas funciones y los pre-requisitos iniciales podemos obtener la solución al problema dado.

1.3. Métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden.

Este texto tuvo su origen en unos apuntes sobre Ecuaciones Diferenciales para los alumnos de la Licenciatura de Matem´aticas, aunque, a lo largo de estos ´ultimos a˜nos,hemos observado que, adem´as, resultaban ´utiles para otras carreras, en particular para las ense˜nanzas de Ingenier´ıas T´ecnicas de la Universidad de La Rioja. Visto que estos apuntes pod´ıan ser aprovechados por diversas personas con diferentes objetivos, y puesto que pod´ıan tener un p´ublico no demasiado restringido, nos decidimos a darles vida en forma de libro.

Los m´etodos cl´asicos para resolver ecuaciones diferenciales son importantes perodif´ıciles de recordar. Por eso nos planteamos escribir algo —en principio, los apuntes antes mencionados— dedicado a ellos con exclusividad, donde se pudiesen encontrar los m´etodos f´acilmente. De aqu´ı que este libro no contiene nada de muchos de los aspectos fundamentales de la teor´ıa de ecuaciones diferenciales: existencia Y unicidad de soluciones,

sistemas de ecuaciones, integraci´on por desarrollos en serie, estabilidad, . . . , por citar s´olo

unos pocos. Es claro que, matem´aticamente hablando, no puede plantearse un estudio serio de las ecuaciones diferenciales sin abordar esos temas, pero no es ´este el objetivo del libro.
Los temas que aqu´ı se tratan pueden explicarse a estudiantes de diversas carreras tal como aparecen desarrollados. En cambio, el estudio de la existencia y unicidad de soluciones,

1.4. Diferencias entre las ecuaciones diferenciales lineales y las no lineales.

Ecuación diferencial es una ecuación que contiene una función desconocida y sus derivadas respecto a una variable independiente. No admite constantes universales, pero si parámetros.

Ecuación diferencial no lineal:

Es una Ecuación Diferencial Ordinaria de la forma siguiente:

A(x, y, y´) + B(x, y, y´) + C(x, y, y´) = 0